

Zur Lösung der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung bei nicht-verschwindendem Gesamtimpuls II*

Von DALLAS T. HAYES

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen
(Z. Naturforsch. 18 a, 559—569 [1963]; eingegangen am 12. Dezember 1962)

The investigation of the localized solutions of the BETHE-GOLDSTONE equation begun in a previous paper¹ is continued for the case where the two-nucleon potential contains a hard-core. The presence of the hard-core in the potential necessitates the use of another method of solution of the B.G.Gl. as that used in I. Using a squarewell for the attractive part of the potential a numerical solution of the equation is obtained. As was the case without hard-core the localized solution as a function of the center-of-mass momentum (c. m. m.) of the nucleon pair exists only in the immediate vicinity of zero c. m. m. The hard-core results in a decrease of the energy-separation of the energy of the solution as measured from the double FERMİ-Energy. The dependence of the energy of the solution upon the c. m. m. is similar to that obtained for a square-well potential without hard-core.

In einer vorangehenden Arbeit¹ wurde bereits das Problem von lokalisierten Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung (B.G.Gl.)² bei nicht-verschwindendem Gesamtimpuls (K) des Nukleonenpaares behandelt. Die Gleichung wurde dort in der Darstellung im Impulsraum formuliert und analytisch und numerisch für ein separierbares Potential und im Sinne einer Näherung für ein Kastenpotential gelöst. Es stellte sich heraus, daß für den Bereich $0 \leq K \leq 2 k_f$ (k_f = FERMİ-Impuls) lokalisierte Lösungen nur in der unmittelbaren Nähe von $K=0$ existieren.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit das gleiche Problem für ein Potential mit einem hard-core-Anteil zu behandeln, d. h.

$$\begin{aligned} v(r) &= v_{hc}(r) + v_a(r) \\ \text{mit } v_{hc}(r) &= \infty \quad \text{für } r \leq c \\ &= 0 \quad \text{für } r > c. \end{aligned} \quad (1)$$

r ist der Abstand der beiden Nukleonen. Für c soll in dieser Arbeit der Wert $0,4 \cdot 10^{-13}$ cm benutzt werden. Die Gestalt des anziehenden Anteils $v_a(r)$ wird zunächst nicht festgelegt.

Die Lösungsmethode, die in I benutzt wurde, läßt sich nicht anwenden, wenn das Potential einen hard-core-Anteil enthält. In der vorliegenden Arbeit wird die Wellenfunktion zum Problem mit hard-core und anziehendem Potential entwickelt nach Lösungen einer B.G.Gl., bei der das Potential nur aus einem hard-core besteht. Man erhält eine Integralgleichung

für die Entwicklungskoeffizienten, aus der die Energie der lokalisierten Lösungen zu bestimmen ist. Eine möglichst weitgehende Separierung dieser Integralgleichung nach Drehimpulsen wird durchgeführt. Da der Projektionsoperator in der Integralgleichung axialsymmetrisch, aber nicht rotations-symmetrisch ist, erhält man zwei Systeme gekoppelter Integralgleichungen, die die Entwicklungskoeffizienten zu geraden bzw. ungeraden Drehimpulsen koppeln. Die Herleitung dieser zwei Systeme wird in Abschnitt 1 durchgeführt. In den Abschnitten 2, 3 und 4 wird das gekoppelte System zu $l=0$ und $l=2$ betrachtet.

Es stellt sich heraus, daß das Kopplungsglied zwischen der Integralgleichung zu $l=0$ und der Integralgleichung zu $l=2$ in dem K -Bereich, in dem eine lokalisierte Lösung existiert, eine unwesentliche Rolle spielt. Deshalb wurde in der Rechnung dieses Glied nicht berücksichtigt. Eine numerische Berechnung der Energie der lokalisierten Lösung der Integralgleichung zu $l=0$ als Funktion von K zeigt, daß Lösungen nur in der unmittelbaren Nähe von $K=0$ existieren wie im Falle ohne hard-core-Anteil im Potential. Für $l=0$ wirkt sich der hard-core so aus, daß die Abweichung der Energien der Lösungen von der doppelten FERMİ-Energie (d.F.E.) und der Lösungsbereich selbst verkleinert werden. Die K -Abhängigkeit der Energie der Lösungen mit hard-core ergibt sich ähnlich der ohne hard-core.

* D 7.

¹ D. T. HAYES, Z. Naturforsch. 18 a, 531 [1963]. Diese Arbeit wird im weiteren als I zitiert; Gleichungen aus dieser Arbeit werden in der Form „Gl. (I.7)“ usw. angegeben.

² H. A. BETHE u. J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A 238, 551 [1957].



1. Allgemeine Formulierung

Die B.G.Gl. für die Begegnung zweier Nukleonen in Kernmaterie lautet

$$(h_0 + \mathcal{P} v - \eta) \Psi = 0. \quad (2)$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in I: h_0 ist der HAMILTON-Operator für die freie Bewegung der beiden Nukleonen; er besteht aus einem kinetischen Energie-Anteil und einem von den übrigen Nukleonen hervorgerufenen Ein-Teilchen-Potential. Das Zwei-Nukleonen-Potential v ist durch Gl. (1) gegeben. \mathcal{P} ist ein Projektionsoperator, der alle Zustände der freien Nukleonen innerhalb der FERMI-Kugel fortprojiziert; er ist in I genau definiert. Ψ ist die Zwei-Nukleonen-Wellenfunktion und η der dazu gehörige Energie-Eigenwert.

Die mathematische Behandlung von Gl. (2) wird erschwert durch das Auftreten des nicht-hermiteschen Operators $\mathcal{P} v$. Für die hier gewählte Formulierung des Problems ist es zweckmäßig, nicht Gl. (2), sondern die hermitesche Gleichung

$$(h_0 + \mathcal{P} v \mathcal{P} - \varepsilon) \chi = 0 \quad (3)$$

zu betrachten. Dann kann man, da \mathcal{P} mit dem HAMILTON-Operator in Gl. (3) vertauschbar ist, die Lösungen χ in zwei Klassen aufteilen³. Entweder ist $\mathcal{P}\chi = \chi$ (Klasse I) und χ ist auch eine Lösung von Gl. (2) oder es ist $\mathcal{P}\chi = 0$ (Klasse II) und χ gehorcht der wechselwirkungsfreien Gleichung

$$(h_0 - \varepsilon) \chi = 0. \quad (4)$$

Sämtliche lokalisierten Lösungen gehören zu Klasse I, da Gl. (4) derartige Lösungen nicht liefern kann. Es werden also hier Lösungen gesucht, die gleichzeitig Lösungen der B.G.Gl. (2) und der hermiteschen B.G.Gl. (3) sind.

Zur Lösung der hermiteschen B.B.Gl. (3), die ein hard-core-Potential und ein anziehendes Potential enthält, wird der Ansatz

$$\chi = \int \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \mathcal{A}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \quad (5)$$

gemacht. Die Zwei-Nukleonen-Wellenfunktionen $\omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ seien hierbei Streulösungen der hermiteschen B.G.Gl.

$$(h_0 + \mathcal{P} v_{\text{hc}} \mathcal{P} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}) \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} = 0, \quad (6)$$

wobei das Potential nur aus einem hard-core-Anteil besteht. \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 sind die Impulse der einlaufenden Teilchen. Die Lösungen $\omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ sollen die Orthogonalitätsbedingung

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'}^*(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1') \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2') \quad (7)$$

und, da es nur Streulösungen gibt, die Vollständigkeitsbedingung

$$\frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2') \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1') \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2') \quad (8)$$

erfüllen.

Der Ansatz Gl. (5) wird in die hermitesche B.B.Gl. (3) eingesetzt; die Gleichung wird mit $\omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^*$ multipliziert und über \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 integriert. Mit Hilfe der Gln. (6) und (7) erhält man

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} - \varepsilon) \mathcal{A}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) + \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{k}_1' d^3\mathbf{k}_2' \langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | \mathcal{P} v_a \mathcal{P} | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle \mathcal{A}(\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2') = 0. \quad (9)$$

Da nun $\omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ Eigenfunktionen der hermiteschen B.G.Gl (6) sind, ist

$$\langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | \mathcal{P} v_a \mathcal{P} | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle = \langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | v_a | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle \quad \text{falls } k_1, k_1', k_2, k_2' \geq k_f \quad \text{und} \quad = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10)$$

Damit wird Gl. (9)

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} - \varepsilon) \mathcal{A}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) + \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{k}_1' d^3\mathbf{k}_2' \mathcal{P}(\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2') \langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | v_a | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle \mathcal{A}(\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2') = 0, \quad (11)$$

wobei $\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ folgendermaßen definiert ist: $\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1$ für $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| \geq k_f$ und $= 0$ sonst.

Es sollen nur lokalisierte Lösungen von Gl. (11) betrachtet werden. Dann kann man Gl. (11) schreiben

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) = - \frac{1}{(2\pi)^6 (\varepsilon_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} - \varepsilon)} \int \int d^3\mathbf{k}_1' d^3\mathbf{k}_2' \mathcal{P}(\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2') \langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | v_a | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle \mathcal{A}(\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'). \quad (12)$$

Es werden als neue Variablen der Gesamtimpuls \mathbf{K} und der Relativimpuls \mathbf{k} eingeführt durch Gl. (I.4). Wegen der Translationsinvarianz der Wechselwirkung läßt sich das Matrixelement in der Form

$$\langle \omega_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} | v_a | \omega_{\mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \rangle = \langle \mathbf{k} | v_a | \mathbf{k}' \rangle \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \quad (13)$$

³ G. LÜDERS, Z. Naturforschg. 14 a, 1 [1959].

schreiben. Es hängt parametrisch vom Gesamtimpuls ab wegen der entsprechenden Abhängigkeit der Wellenfunktionen $\omega_{k_1 k_2}$ (siehe Anhang).

$P(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ wird wie in I als Funktion $P(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ der Variablen \mathbf{K} und \mathbf{k} geschrieben mit der Erläuterung: $P(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = 1$ für $|k + K/2|, |k - K/2| \geq k_t$ und $= 0$ sonst. Für $\varepsilon_{k_1 k_2}$ wird die Näherung der effektiven Masse gemacht

$$\varepsilon_{k_1 k_2} = (1/2 m^*) (k_1^2 + k_2^2) = (K^2/4 m^*) + (k^2/m^*). \quad (14)$$

Als Lösung der Gl. (12) werde jetzt eine Funktion festen Gesamtimpulses \mathbf{K} angesetzt

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) = \mathcal{A}_K(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}'); \quad (15)$$

in der Funktion $\mathcal{A}_K(\mathbf{k})$ spielt \mathbf{K} die Rolle eines Parameters. Dies ist die gleiche Situation wie für die Wellenfunktion $\chi_K(\mathbf{k})$ in I. Jedoch ist hier nicht nur die Abhängigkeit des Projektionsoperators \mathcal{P} von \mathbf{K} , sondern auch die parametrische Abhängigkeit des Matrixelements $\langle \mathbf{k} | v_a | \mathbf{k}'; \mathbf{K} \rangle$ von \mathbf{K} Ursache für die parametrische Abhängigkeit der Funktion $\mathcal{A}_K(\mathbf{k})$ von \mathbf{K} . Durch Einsetzen der Gl. (15) in Gl. (12) und unter Verwendung der Gln. (I.4), (13) und (14) erhält man für die Funktion $\mathcal{A}_K(\mathbf{k})$ die Integralgleichung

$$\mathcal{A}_K(\mathbf{k}) = - \frac{1}{(2\pi)^3 (K^2/4 m^* + k^2/m^* - \varepsilon)} \cdot \int d^3 \mathbf{k}' \mathcal{P}(\mathbf{K}, \mathbf{k}') \langle \mathbf{k} | v_a | \mathbf{k}'; \mathbf{K} \rangle \mathcal{A}_K(\mathbf{k}'). \quad (16)$$

Der Projektionsoperator wird wie in Gl. (I.8) nach normierten Kugelfunktionen entwickelt

$$\mathcal{P}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \sum_{l \text{ gerade}} \mathcal{P}_l^K(k) Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \equiv \mathcal{P}_K(k, \vartheta). \quad (I.8)$$

Die Achse des Polarkoordinatensystems ist in die Richtung des Vektors \mathbf{K} gelegt; ϑ ist der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{K} und \mathbf{k} . Die Funktion $\mathcal{P}_l^K(k)$ ist für $K \leq 2 k_t$ in Gl. (I.8) angegeben. In gleicher Weise wird der Entwicklungskoeffizient $\mathcal{A}_K(\mathbf{k})$ entwickelt

$$\mathcal{A}_K(\mathbf{k}) = \sum_{l, m} \mathcal{A}_{l, m}^K(k) Y_{l, m}(\vartheta, \varphi). \quad (17)$$

Entsprechende Umformungen sollen jetzt am Matrixelement von v_a vorgenommen werden. Wegen der Translationsinvarianz des hard-core-Potentials läßt sich die hard-core-Wellenfunktion $\omega_{k_1 k_2}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)$ in der Form

$$\omega_{k_1 k_2}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = \exp\{i \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}\} \omega_K^{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \quad (18)$$

schreiben; dabei ist \mathbf{r} der Abstand der beiden Nukleonen; \mathbf{R} ist die Koordinate des Schwerpunktes. Für die Wellenfunktion wird der Ansatz

$$\omega_K^{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l, l', m} i^l \omega_{k, l, l', m}^{\mathbf{K}}(r) Y_{lm}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{l'm}^*(\vartheta, \varphi) \quad (19)$$

gemacht; dieser Ansatz ist erlaubt, da $\omega_K^{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ als Folge der Axialsymmetrie des Projektionsoperators um die \mathbf{K} -Richtung nur von der Differenz der Winkel φ_r und φ abhängen kann. Die ϑ -Abhängigkeit des Projektionsoperators $\mathcal{P}_K(k, \vartheta)$ ist für kleine K schwach und wird in der Gleichung für $\omega_K^{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ deshalb vernachlässigt; die Zulässigkeit dieser Näherung wird nachträglich geprüft werden (vgl. Schluß von Abschn. 3). Die Wellenfunktion hängt dann nicht mehr von ϑ_r , ϑ und $\varphi_r - \varphi$ einzeln ab, sondern nur von dem Winkel zwischen den Richtungen von \mathbf{r} und \mathbf{k} . Wegen des Additionstheorems der Kugelfunktionen kann der Ansatz Gl. (19) vereinfacht werden zu

$$\omega_K^{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l, m} i^l \omega_{k, l, m}^{\mathbf{K}}(r) Y_{l, m}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{l, m}^*(\vartheta, \varphi). \quad (20)$$

Mit dieser Näherung erhält man für die Entwicklung des Matrixelements in Gl. (16)

$$\langle \mathbf{k} | v_a | \mathbf{k}'; \mathbf{K} \rangle = (4\pi)^2 \sum_{l, m} \langle k | v_a | k'; l, m, K \rangle Y_{l, m}(\vartheta, \varphi) Y_{l, m}^*(\vartheta', \varphi') \quad (21)$$

$$\text{mit} \quad \langle k | v_a | k'; l, m, K \rangle = \int r^2 dr \omega_{k, l, m}^{\mathbf{K}}(r) v_a(r) \omega_{k, l, m}^{\mathbf{K}}(r). \quad (22)$$

Einsetzen von Gl. (I.8), (21) und (17) in Gl. (16) und Verwendung der Gl. (I.12) führt schließlich zur Gleichung

$$A_{l,m}^K(k) = - \frac{2}{\pi(K^2/4 m^* + k^2/m^* - \varepsilon)} \sum_{l'} \sum_{l'' \text{ gerade}} \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2l''+1)} \right]^{1/2} \langle l', l, 0, 0 | l'', 0 \rangle \langle l', l, 0, m | l'', m \rangle \cdot \int k'^2 dk' P_l^K(k') \langle k | v_a | k'; l, m, K \rangle A_{l',m}^K(k'). \quad (23)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gl. (I.13) nur dadurch, daß das Matrixelement $\langle k | v_a | k'; l, m, K \rangle$ jetzt von K abhängig ist. Wieder sind nur Partialwellen mit geraden bzw. ungeraden Drehimpulsen gekoppelt.

2. Lösung des gekoppelten Gleichungssystems für S- und D-Wellen

Es wird das gekoppelte System der Integralgleichungen zu $l=0$ und $l=2$, $m=0$ betrachtet, das gemäß Gl. (23) lautet

$$A_{00}^K(k) = - \frac{1}{\pi^{3/2}(K^2/4 m^* + k^2/m^* - \varepsilon)} \cdot \left\{ \int k'^2 dk' P_0^K(k') \langle k | v_a | k'; 0, 0, K \rangle A_{00}^K(k') + \int k'^2 dk' P_2^K(k') \langle k | v_a | k'; 0, 0, K \rangle A_{20}^K(k') \right\}, \quad (24)$$

$$A_{20}^K(k) = - \frac{1}{\pi^{3/2}(K^2/4 m^* + k^2/m^* - \varepsilon)} \cdot \left\{ \int k'^2 dk' \left[P_0^K(k') + \frac{2\sqrt{5}}{7} P_2^K(k') + 3 \sqrt{\frac{2}{7}} P_4^K(k') \right] \cdot \langle k | v_a | k'; 2, 0, K \rangle A_{20}^K(k') + \int k'^2 dk' P_2^K(k') \langle k | v_a | k'; 2, 0, K \rangle A_{00}^K(k') \right\}. \quad (25)$$

In beiden Integralgleichungen sind die Kopplungsglieder zu $l > 2$ weggelassen. Es werden nur Lösungen dieses Gleichungssystems im Bereich $K \leq 2 k_f$ betrachtet. Das Gleichungssystem soll für ein ε gelöst werden, das einer lokalisierten Lösung der B.G.Gl entspricht, d. h. $\varepsilon < k_f^2/m^*$. Falls eine solche Lösung existiert, wird angenommen, daß sie dicht unterhalb der d.F.E. (k_f^2/m^*) liegt. Für verschwindendes K ist dies der Fall (siehe BRENIG⁴). Die Ergebnisse von I hatten gezeigt, daß diese Annahme auch für ein separierbares Potential und für ein Kastenpotential ohne hard-core-Anteil zutrifft. Es ist dann zweckmäßig,

$$\varepsilon = (k_f^2/m^*) (1 - \Delta) \quad (26)$$

zu setzen, wobei $\Delta \ll 1$. Weiter wird angenommen, daß die lokalisierbaren Lösungen für $K \leq 2 k_f$ nur in einem Bereich von K existieren, in dem $K/k_f \ll 1$ ist. In I führten diese Annahmen für das Kastenpotential dazu, daß man die Näherung $v(k, k') \approx v(k, k_f)$ machte [siehe Gl. (I.41) und folgenden Absatz]. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Wechselwirkung kurze Reichweite besitzt, d. h. die Funktion $v(k, k')$ soll langsam in k bzw. k' veränderlich sein. Im Falle, der hier zur Diskussion steht, trifft diese Voraussetzung jetzt nicht mehr zu. Das sieht man leicht, wenn man die hard-core-Wellenfunktion betrachtet. Die Wellenfunktion kann man nämlich schreiben

$$\omega_{k,l,m}^K(r) = A_{l,m}^K(k) u_{k,l,m}^K(r) \quad (27)$$

[siehe Anhang Gl. (A.18)], wobei $u_{k,l,m}^K(r)$ für kleine r als Funktion von k langsam veränderlich ist. Die Funktion $A_{l,m}^K(k)$ ist dagegen in der Umgebung von $k = k_f + K/2$ schnell veränderlich und verschwindet bei $k = k_f + K/2$ wie $[\ln(k - k_f - K/2)]^{-1}$ [siehe z. B. Gl. (54)].

Deshalb wird

$$\langle k | v_a | k'; l, m, K \rangle = A_{l,m}^{K*}(k) A_{l,m}^K(k') \langle k | \tilde{v}_a | k'; l, m, K \rangle \quad (28)$$

gesetzt mit der als Funktion von k und k' langsam veränderlichen Größe

$$\langle k | \tilde{v}_a | k'; l, m, K \rangle = \int r^2 dr u_{k,l,m}^K(r) v_a(r) u_{k',l,m}^K(r). \quad (29)$$

Wie in I wird die Näherung

$$k' \langle k | \tilde{v}_a | k'; l, m, K \rangle \approx k_f \langle k | \tilde{v}_a | k_f; l, m, K \rangle \quad (30)$$

⁴ W. BRENIG, Z. Phys. **156**, 525 [1959].

gemacht. Gl. (28) wird in Gln. (24) und (25) eingesetzt. Als Folge der Näherung Gl. (30) erhält man

$$A_{00}^K(k) = - \frac{C_0^K A_{00}^K(k) \langle k | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle}{(K^2/4 m^* + k^2/m^* - k_f^2/m^* (1-\Delta))}, \quad A_{20}^K(k) = - \frac{C_2^K A_{20}^K(k) \langle k | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle}{(K^2/4 m^* + k^2/m^* - k_f^2/m^* (1-\Delta))}, \quad (31), (32)$$

wobei die Konstanten C_0^K und C_2^K gegeben sind durch

$$C_0^K = \frac{k_f}{\pi^{3/2}} \left\{ \int k' dk' P_0^K(k') A_{00}^K(k') A_{00}^K(k') + \int k' dk' P_2^K(k') A_{00}^K(k') A_{20}^K(k') \right\}, \quad (33)$$

$$C_2^K = \frac{k_f}{\pi^{3/2}} \left\{ \int k' dk' \left[P_0^K(k') + \frac{2\sqrt{5}}{7} P_2^K(k') + 3 \sqrt{\frac{2}{7}} P_4^K(k') \right] \cdot A_{20}^K(k') A_{20}^K(k') + \int k' dk' P_2^K(k') A_{20}^K(k') A_{00}^K(k') \right\}. \quad (34)$$

Man setzt Gln. (31) und (32) in Gln. (33) und (34) ein. Dann wird nochmal die Näherung von Gl. (30) gemacht und man erhält für die Konstanten C_0^K und C_2^K die Gleichungen

$$C_0^K = k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle I_0(K, \Delta) C_0^K + k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle I_{02}(K, \Delta) C_2^K, \quad (35)$$

$$C_2^K = k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle I_2(K, \Delta) C_2^K + k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle I_{20}(K, \Delta) C_0^K. \quad (36)$$

Hierbei ist

$$I_0(K, \Delta) = - \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int \frac{P_0^K(k) |A_{00}^K(k)|^2 dk}{(K^2/4 + k^2 - k_f^2(1-\Delta))}; \quad (37)$$

$$I_2(K, \Delta) = - \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int \frac{\left[P_0^K(k) + \frac{2\sqrt{5}}{7} P_2^K(k) + 3 \sqrt{\frac{2}{7}} P_4^K(k) \right] |A_{20}^K(k)|^2 dk}{(K^2/4 + k^2 - k_f^2(1-\Delta))}; \quad (38)$$

$$I_{02}(K, \Delta) = I_{20}^*(K, \Delta) = - \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int \frac{P_2^K(k) A_{00}^{K*}(k) A_{20}^K(k) dk}{(K^2/4 + k^2 - k_f^2(1-\Delta))}. \quad (39)$$

Für festgehaltenes K und Δ bilden die Gln. (35) und (36) ein homogenes Gleichungssystem für die Konstanten C_0^K und C_2^K . Dieses System besitzt bekanntlich dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Es muß also gelten

$$[k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle I_0(K, \Delta) - 1] [k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle I_2(K, \Delta) - 1] = k_f^4 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle |I_{02}(K, \Delta)|^2. \quad (40)$$

Es wird später in Abschnitt 4 gezeigt werden, daß

$$k_f^4 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle |I_{02}(K, \Delta)|^2 \ll 1 \quad (41)$$

gilt in dem Bereich von K , in dem eine Lösung Δ existiert. Daher kann man in guter Näherung die Gleichungen

$$k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle I_0(K, \Delta) = 1 \quad \text{und} \quad k_f^2 \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle I_2(K, \Delta) = 1 \quad (42), (43)$$

als ungekoppelte Gleichungen für $\Delta = \Delta_0$ bzw. $\Delta = \Delta_2$ betrachten. Es wird nur die Gleichung für $l=0$ im folgenden betrachtet; ferner wird das Kopplungsglied Gl. (41) diskutiert.

3. Numerische Lösung der Gl. (42) für Δ_0

Setzt man Gl. (37) in Gl. (42) ein und verwendet den expliziten Ausdruck für $P_0^K(k)$, so ergibt sich

$$1 = - \frac{2 m^* k_f^2}{\pi} \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle \cdot \left\{ \int_{\beta(K)}^{\infty} \frac{|A_{00}^K(k)|^2 dk}{K^2/4 + k^2 - k_f^2(1-\Delta)} - \int_{\alpha(K)}^{\beta(K)} \left(\frac{k_f^2 - K^2/4 - k^2}{K k} \right) \frac{|A_{00}^K(k)|^2 dk}{K^2/4 + k^2 - k_f^2(1-\Delta)} \right\} \quad (44)$$

mit $\alpha(K) = (k_f^2 - K^2/4)^{1/2}$; $\beta(K) = (k_f + K/2)$.

Aus dieser Gleichung ist Δ_0 als Funktion von K numerisch zu bestimmen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Ausdrücke für $A_{00}^K(k)$ und die im Matrixelement verwendete Wellenfunktion $u_{k,0,0}^K(r)$ näher. Die allgemeinen Ausdrücke dafür sind im Anhang in Gln. (A.18) und (A.19) angegeben. Aus dem Anhang

Gl. (A.19) findet man in diesem Fall ($l=0$, $m=0$)

$$A_{00}^K(k) = \frac{\pi}{2} j_0(kc) \left\{ c G_0(c, c; k) + \int_0^c r dr G_0(c, r; k) q_{00}^K(r) - \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left[c G_{00}^0(c, c; k, K) + \int_0^c r dr G_{00}^0(c, r; k, K) q_{00}^K(r) \right] \right\}^{-1}. \quad (45)$$

Für die Wellenfunktion $u_{k,0,0}^K(r)$ erhält man aus Gl. (A.18)

$$u_{k,0,0}^K(r) = \frac{\sin k(r-c)}{kr} - \frac{1}{kr} \int_c^r \sin k(r-r') q_{00}^K(r') dr'. \quad (46)$$

Die Funktion $q_{00}^K(r)$ ist gegeben als Lösung der Integralgleichung [Gl. (A.16)]

$$q_{00}^K(r) = \frac{r}{\pi^{3/2}} \left\{ c g_{00}^0(r, c; K) + \int_0^c r' dr' g_{00}^0(r, r'; K) q_{00}^K(r') \right\}. \quad (47)$$

Für $k_f c < 1$ läßt sich Gl. (47) nähern⁵ durch

$$q_{00}^K(r) \approx \frac{rc}{\pi^{3/2}} g_{00}^0(r, c; K) \left\{ 1 + \frac{c^3}{2\pi^{3/2}} g_{00}^0(c, c; K) \right\}; \quad (48)$$

in dieser Arbeit wurde verwendet $k_f = 1,375 \cdot 10^{-13}$ cm und $c = 0,4 \cdot 10^{-13}$ cm, d. h. $k_f c = 0,55$. Hiermit ist die Gl. (47) durch Iteration bis einschließlich der 1. Iteration gelöst und das darin vorkommende Integral durch

$$\int_0^c g_{00}^0(r, r'; K) g_{00}^0(r', c; K) r'^2 dr' \approx \frac{c^3}{2} g_{00}^0(r, c; K) g_{00}^0(c, c; K) \quad (49)$$

genähert. Im Sinne dieser Näherung würde die nächste Iteration ein Glied

$$(c^6/4\pi^3) [g_{00}^0(c, c; K)] < k_f^6 c^6/4\pi^3 \approx 10^{-4} \quad \text{liefen.}$$

Gl. (48) wird in Gl. (45) eingesetzt. Nach einer ähnlichen Näherung wie in Gl. (49) ergibt sich

$$\int_0^c G_{00}^0(c, r; k, K) q_{00}^K(r) r dr \approx \frac{c^4}{2\pi^{3/2}} G_{00}^0(c, c; k, K) g_{00}^0(c, c; K) \left\{ 1 + \frac{c^3}{2\pi^{3/2}} g_{00}^0(c, c; K) \right\}.$$

Dann wird

$$A_{00}^K(k) \approx \frac{\pi}{2c} j_0(kc) \left\{ G_0(c, c; k) - \frac{1}{2\pi^{1/2}} \left[1 + \frac{c^3}{2\pi^{3/2}} g_{00}^0(c, c; K) \right] \cdot \left[G_{00}^0(c, c; k, K) - \frac{2}{\pi} \int_0^c G_0(c, r; k) g_{00}^0(r, c; K) r^2 dr \right] \right\}^{-1}. \quad (50)$$

Das Integral in Gl. (50) darf allerdings nicht weiter approximiert werden, da sonst Funktionen verloren gehen würden, die gleichartige Anteile von $G_{00}^0(c, c; k, K)$ kompensieren.

Man erhält aus Gln. (A.6) und (A.9)

$$g_{00}^0(r, r'; K) = 2\pi^{1/2} \left\{ \int_0^{\beta(K)} j_0(kr) j_0(kr') k^2 dk + \int_{\alpha(K)}^{\beta(K)} \left(\frac{k_f^2 - K^2/4 - k^2}{K} \right) j_0(kr) j_0(kr') k dk \right\} \quad (51)$$

und aus Gln. (A.6) und (A.12)

$$G_{00}^0(r, r', k, K) = 2\pi^{1/2} \left\{ \int_0^{\beta(K)} \frac{j_0(k'r) j_0(k'r') k'^2 dk'}{k'^2 - k^2} + \int_{\alpha(K)}^{\beta(K)} \left(\frac{k_f^2 - K^2/4 - k'^2}{K} \right) \frac{j_0(k'r) j_0(k'r') k' dk'}{k'^2 - k^2} \right\}. \quad (52)$$

⁵ Siehe Fußnote 2, Gl. (4.7).

In der numerischen Berechnung wurde der Wert von Δ_0 als Funktion von K bis auf 3 Stellen bestimmt. In den dabei verwendeten Ausdrücken für $g_{00}^0(r, r'; K)$ und $G_{00}^0(r, r'; k, K)$ wurden einmal die Anteile von den Integralen zwischen $\alpha(K)$ und $\beta(K)$ vernachlässigt. Bei einer weiteren Rechnung wurden sie zur Kontrolle berücksichtigt. Die Werte für Δ_0 sind innerhalb der verlangten Genauigkeit dieselben. Die Funktionen $A_{00}^K(k)$ und $u_{k,0,0}^K(r)$ werden daher nun ohne die Anteile von diesen Integralen angegeben. Mit

$$G_0(c, c; k) = \frac{\pi}{2c} j_0(kc) e^{ikc} \quad (53)$$

aus Gl. (A 11) erhält man für

$$\begin{aligned} [A_{00}^K(k)]^{-1} = & \cos kc - \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{c}{2\pi} \left(\beta(K) - \frac{\sin 2\beta(K)c}{c} \right) \right\} \\ & \cdot \left\{ \cos kc [\text{Si } 2c(k + \beta(K)) - \text{Si } 2c(k - \beta(K))] \right. \\ & \quad \left. - \sin kc \left[\ln \frac{k + \beta(K)}{k - \beta(K)} + \text{Ci } 2c(k + \beta(K)) - \text{Ci } 2c(k - \beta(K)) \right] \right\} \\ & + i \sin kc - \frac{i}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{c}{2\pi} \left(\beta(K) - \frac{\sin 2\beta(K)c}{c} \right) \right\} \\ & \cdot \left\{ \cos kc \left[\text{Ci } 2c(k + \beta(K)) - \text{Ci } 2c(k - \beta(K)) - \ln \frac{k + \beta(K)}{k - \beta(K)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \sin kc [\text{Si } 2c(k + \beta(K)) - \text{Si } 2c(k - \beta(K))] \right\}, \quad (54) \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $\text{Si}(\)$ und $\text{Ci}(\)$ in JAHNKE-EMDE⁶ definiert sind.

Durch Einsetzen von Gl. (48) in Gl. (46) und nach Integration über r' erhält man

$$\begin{aligned} u_{k,0,0}^K(r) = & \frac{\sin k(r-c)}{kr} - \frac{1}{2\pi kr} \left\{ 1 + \frac{c}{2\pi} \left(\beta(K) - \frac{\sin 2\beta(K)c}{c} \right) \right\} \\ & \cdot \left\{ \sin k(r-c) [\text{Si}(k + \beta(K))(r-c) - \text{Si}(k - \beta(K))(r-c)] \right. \\ & + \sin k(r+c) [\text{Si}(k - \beta(K))(r+c) - \text{Si } 2c(k - \beta(K)) - \text{Si}(k + \beta(K))(r+c) + \text{Si } 2c(k + \beta(K))] \\ & - \cos k(r-c) \left[\ln \frac{k + \beta(K)}{k - \beta(K)} + \text{Ci}(k - \beta(K))(r-c) - \text{Ci}(k + \beta(K))(r-c) \right] \\ & \left. - \cos k(r+c) [\text{Ci}(k + \beta(K))(r+c) - \text{Ci } 2c(k + \beta(K)) - \text{Ci}(k - \beta(K))(r+c) + \text{Ci } 2c(k - \beta(K))] \right\}. \quad (55) \end{aligned}$$

Zur Auswertung des Matrixelementes $\langle k_f | \tilde{v}_a | k_i; 0, 0, K \rangle$ wurde das gleiche Kastenpotential wie in der Arbeit von BREINIG⁴ benutzt. Man hat für das anziehende Potential

$$\begin{aligned} v_a(r) &= -80 \text{ MeV} \quad \text{für } c < r \leq c + b, \\ &= 0 \quad \text{für } r > c + b \end{aligned} \quad (56)$$

mit $b = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$. Dieses Potential gibt die Triplett-Streuung bei kleinen Energien richtig wieder. m^* wurde in der Rechnung $0,75 m$ gesetzt.

Die Größe Δ_0 wurde als Funktion von K aus Gl. (44) numerisch zu drei Stellen mit der IBM-Rechenanlage in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 1 aufgetragen. Bei $K=0$ ist $\Delta_0 = 1,25 \cdot 10^{-3} (k_f^2/m^* = 0,125 \text{ MeV})$; Δ_0 verschwindet bei $\hat{K}/k_f = 2,86 \cdot 10^{-3}$.

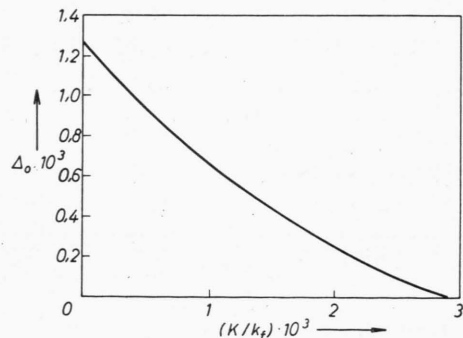


Abb. 1. Abstand der Energie der lokalisierten Lösung der B.G.Gl. zu $l=0$ von der d.f.e. als Funktion des Gesamtimpulses (K).

Diese Resultate rechtfertigen die Annahmen, daß die Lösungen dicht unterhalb der d.f.e. liegen und nur in der unmittelbaren Nähe des Gesamtimpulses Null existieren.

⁶ E. JAHNKE u. F. EMDE, Funktionentafeln, Verlag Teubner, Stuttgart 1960.

Dieses Ergebnis für Δ_0 soll nun mit den Werten von Δ_0 verglichen werden, die sich für ein Kastenpotential ohne hard-core-Anteil ergeben. Das Potential soll die gleiche Streulänge und effektive Reichweite wie das Kastenpotential mit hard-core-Anteil in Gl. (56) liefern. Das Kastenpotential ohne hard-core ist gegeben durch

$$\begin{aligned} v_0 &= \hbar^2 \pi^2 s / 4 m b_0^2 & \text{für } r \leq b_0, \\ &= 0 & \text{für } r > b_0 \\ \text{mit } b_0 &= 2c + b = 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, & (57) \\ s &= 1,44. \end{aligned}$$

Mit diesem Potential erhält man aus Gl. (I.45), $\Delta_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ für $K=0$. Δ_0 verschwindet bei $\hat{K}/k_f = 10^{-2}$. Hierbei sieht man, daß durch einen hard-core-Anteil im Potential für $l=0$ die Größe von Δ_0 im Lösungsbereich und der Lösungsbereich selbst verkleinert werden.

Im Falle von anziehendem Potential ohne hard-core rührt die K -Abhängigkeit der Lösung Δ_0 nur vom Projektionsoperator her. Wenn das Potential einen hard-core-Anteil enthält, kommt nach den hier gewählten Lösungsverfahren auch die Abhängigkeit der hard-core-Wellenfunktionen von K hinzu. Ein Vergleich von Abb. 1 mit Abb. I.3 zeigt, daß die Abhängigkeit der Lösung Δ_0 von K in beiden Fällen ähnlich ist. Daraus ist zu schließen, daß die Abhängigkeit der hard-core-Wellenfunktion von K wenig Einfluß auf den Zahlenwert von Δ_0 hat.

Der hier erhaltene Wert von Δ_0 für ein Potential mit hard-core ist ungefähr 4-mal kleiner als der von BRENIG⁴ für dasselbe Potential erhaltene. Diese Diskrepanz ist damit zu erklären, daß BRENIG einen Näherungsausdruck für $A_{00}^K(k)$ benutzt, der ihm erlaubt, das erste Integral in Gl. (44) exakt auszuführen. Dieser Näherungsausdruck stimmt zwar mit den exakten $A_{00}^K(k)$ in der Nähe von $k=k_f$ gut überein, jedoch wird $A_{00}^K(k)$ im übrigen Bereich durch den Näherungsausdruck überschätzt (siehe Abb. 2). Dies führt zu einer Vergrößerung von Δ_0 .

Es wurden schließlich die Folgerungen untersucht, die eintreten, wenn man die ϑ -Abhängigkeit des Projektionsoperators in der Lösung der B.G.Gl. für hard-core berücksichtigt. Die formalen Änderungen, die dabei auftreten, sind natürlich erheblich. Man muß zur Ableitung des Analogons zu Gl. (23) den allgemeinen Ansatz Gl. (19) für $\omega_k^K(\mathbf{r})$ benutzen. Es soll hier nicht die explizite Rechnung angegeben werden. Es stellt sich heraus, daß der Einfluß einer

derartigen genaueren Berechnung auf dem Zahlenwert von Δ_0 innerhalb der verwendeten Genauigkeit vernachlässigbar ist.

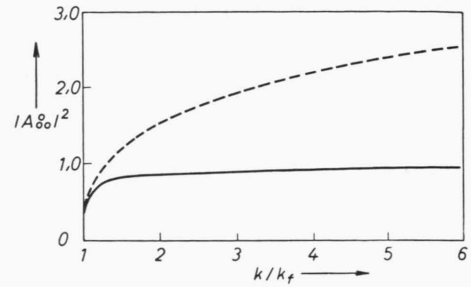


Abb. 2. Vergleich des absoluten Betrages der Funktion $A_{00}^K(k)$ Gl. (54) (ausgezogene Kurve) mit der Näherung von BRENIG für $A_{00}^K(k)$ (gestrichelte Kurve). In beiden Fällen ist $K=0$.

4. Kopplungsglied

Das Kopplungsglied auf der rechten Seite von Gl. (40) wächst mit K . Andererseits verschwindet die Größe Δ_0 bei $\hat{K}/k_f \cong 3 \cdot 10^{-3}$. Es ist daher sinnvoll, das Kopplungsglied für diesen Wert von K/k_f abzuschätzen; die Abschätzung ergibt eine obere Schranke für die Größe des Kopplungsgliedes. Durch Einsetzen von Gl. (39) in Gl. (41) erhält man für das Kopplungsglied

$$\frac{m^{*2} k_f^4}{\pi^3} \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 0, 0, K \rangle \langle k_f | \tilde{v}_a | k_f; 2, 0, K \rangle \cdot \left| \int_{a(K)}^{\beta(K)} \frac{P_2^K(k) A_{00}^{K*}(k) A_{20}^K(k) dk}{K^2/4 + k^2 - k_f^2(1 - \Delta)} \right|^2. \quad (58)$$

In dem Bereich von k , über den zu integrieren ist (eine kleine Umgebung von $k=k_f$), kann $A_{00}^K(k)$ noch weiter genähert werden. Es läßt sich dann in guter Näherung $\sin k c \approx \sin k_f c \approx k_f c$ setzen u. ä. (Beachte $k_f c = 0,55$!) Auf diese Weise läßt sich $A_{00}^K(k)$ in Gl. (54) nähern, und man erhält

$$A_{00}^K(k) \approx \frac{1}{k_f c} \left\{ \frac{1}{k_f c} - \frac{2 - \ln 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{k}{k_f} - \frac{\beta(K)}{k_f} \right) + i \right\}^{-1}. \quad (59)$$

Eine ähnliche Näherung für $A_{20}^K(k)$ in Gl. (A 19) ergibt

$$A_{20}^K(k) \approx - \frac{15}{k_f^3 c^3} \left\{ \frac{45}{k_f^5 c^5} - \frac{14}{3\pi} + \frac{15}{2\pi k_f^2 c^2} + \frac{\ln 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{k}{k_f} - \frac{\beta(K)}{k_f} \right) + i \right\}^{-1}. \quad (60)$$

In beiden Ausdrücken wurden alle Größen $< k_t^2 c^2$ vernachlässigt.

Den Wert des Matrixelements zu $l=0$ nimmt man bei dieser Abschätzung aus der Rechnung des Abschnitts 3. Für $l=2$ wurde das Matrixelement mit der Näherung

$$u_{k,2,0}^0(r) \approx k c \{ j_2(k c) n_2(k r) - n_2(k c) j_2(k r) \} \quad (61)$$

berechnet. Mit dieser Wellenfunktion wird das Matrixelement zu $l=2$ ungefähr um 10% überschätzt.

Das Kopplungsglied wurde dann numerisch berechnet; man erhält bei $K/k_t = 3 \cdot 10^{-3}$ einen Wert

von ungefähr 10^{-3} , womit bestätigt ist, daß das Kopplungsglied eine unwesentliche Rolle in der Bestimmung von Δ_0 spielt.

Herrn Professor Dr. G. LÜDERS bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für ihre Förderung sehr dankbar. Herrn Prof. Dr. W. BRENIG bin ich wegen vieler Diskussionen zu Dank verpflichtet. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine IBM 650 in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen zu benutzen; den Mitarbeitern des Rechenzentrums danke ich für ihre Hilfe bei der Durchführung der Rechnungen.

Anhang

Lösung der B.G.Gl. für hard-core-Potential bei $K \neq 0$

Da nur Lösungen der B.G.Gl. gesucht werden, bei denen die Impulse beider Nukleonen außerhalb der FERMI-Kugel liegen, genügt es, die nicht-hermitesche B.G.Gl. zu betrachten. Die Lösungen für nicht verschwindenden Gesamtimpuls werden nach derselben Methode gewonnen, die in der Arbeit von BETHE und GOLDSTONE² bei verschwindendem Gesamtimpuls benutzt wurde; bei $K \neq 0$ tritt allerdings eine Reihe von Komplikationen auf. In der jetzigen Arbeit lautet die Gleichung in der Darstellung im Ortsraum mit \mathbf{r} als Abstand der beiden Nukleonen

$$(\nabla^2 + k^2) \omega_k^K(\mathbf{r}) = m^* v_{hc}(r) \omega_k^K(\mathbf{r}) - m^* \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; K) v_{hc}(r') \omega_k^K(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (A 1)$$

wobei gilt

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; K) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (1 - \mathcal{P}_K(k', \vartheta')) e^{i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 \mathbf{k}'. \quad (A 2)$$

$\mathcal{P}_K(k, \vartheta)$ ist in Gl. (I.14) angegeben. Es soll nur der Fall $K \leq 2 k_t$ betrachtet werden.

Es werden Lösungen der Gl. (A 1) gesucht, die sich asymptotisch wie $e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\vartheta, \varphi) e^{i k r}/r$ verhalten, d. h. $\omega_k^K(\mathbf{r})$ ist eine Lösung der Integralgleichung

$$\omega_k^K(\mathbf{r}) = e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k, K) v_{hc}(r') \omega_k^K(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (A 3)$$

mit

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k, K) = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 \mathbf{k}'}{k'^2 - k^2 - i \eta} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{(1 - \mathcal{P}_K(k', \vartheta')) e^{i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 \mathbf{k}'}{k'^2 - k^2}. \quad (A 4)$$

Die Größen $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; K)$ und $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k, K)$ sollen nach normierten Kugelfunktionen entwickelt werden. Mit Hilfe der Entwicklung von $\mathcal{P}_K(k, \vartheta)$ in Gl. (I.8) erhält man zunächst

$$(1 - \mathcal{P}_K(k, \vartheta)) = \sum_{l \text{ gerade}} \tilde{\mathcal{P}}_l^K(k) Y_{l0}(\vartheta, \varphi), \quad (A 5)$$

wobei die Koeffizienten $\tilde{\mathcal{P}}_l^K(k)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_0^K(k) &= 2 \pi^{1/2} & \text{für } k < (k_t + K/2), \\ \tilde{\mathcal{P}}_l^K(k) &= -2 \left(\frac{\pi}{2l+1} \right)^{1/2} [P_{l+1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k)) - P_{l-1}^0(\cos \bar{\Theta}_K(k))] & \text{für } (k_t^2 - K^2/4)^{1/2} \leq k < (k_t + K/2), \\ &= 0 & \text{für } (k_t + K/2) \leq k. \end{aligned} \quad (A 6)$$

Weiter wird gesetzt

$$e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4 \pi \sum_{l,m} i^l j_l(k r) Y_{lm}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (A 7)$$

Gln. (A 5) und (A 7) werden in Gl. (A 2) eingesetzt. Unter Verwendung von Gl. (I.12) und nach Integration über $\sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ erhält man

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; K) = \frac{2}{\pi} \sum_{l, l'} \sum_{l' \text{ gerade}} \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2l'+1)} \right]^{1/2} \langle l, l', 0, 0 | l', 0 \rangle \cdot \langle l, l', -m, m | l', 0 \rangle i^l (-i)^{l'} g_{ll'}^{l''}(r, r'; K) \cdot Y_{lm}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{l'm}^*(\vartheta_{r'}, \varphi_{r'}) \quad (\text{A 8})$$

mit
$$g_{ll'}^{l''}(r, r'; K) = \int k'^2 dk' \tilde{\mathcal{P}}_{l'}^K(k') j_l(k'r) j_{l'}(k'r'). \quad (\text{A 9})$$

Das gleiche Verfahren liefert für

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k, K) = \frac{2}{\pi} \sum_l G_l(r, r'; k) - \frac{2}{\pi} \sum_{l, l'} \sum_{l' \text{ gerade}} \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2l'+1)} \right]^{1/2} \langle l, l', 0, 0 | l', 0 \rangle \cdot \langle l, l', -m, m | l', 0 \rangle i^l (-i)^{l'} G_{ll'}^{l''}(r, r'; k, K) Y_{lm}(\vartheta_r, \varphi_r) Y_{l'm}^*(\vartheta_{r'}, \varphi_{r'}) \quad (\text{A 10})$$

mit
$$G_l(r, r'; k) = \begin{cases} \frac{ik\pi}{2} j_l(kr') h_l^{(1)}(kr) & \text{für } r > r' \\ \frac{ik\pi}{2} j_l(kr) h_l^{(1)}(kr') & \text{für } r < r', \end{cases} \quad (\text{A 11})$$

und
$$G_{ll'}^{l''}(r, r'; k, K) = \int \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{l'}^K(k') j_l(k'r) j_{l'}(k'r') k'^2 dk'}{k'^2 - k^2} \quad (\text{A 12})$$

Hier sind $j_l(kr)$ und $n_l(kr)$ die sphärischen BESSEL- bzw. NEUMANN-Funktionen; $h_l^{(1)}(kr)$ ist die HANKEL-Funktion erster Art

$$h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + i n_l(kr).$$

Da nur der kugelsymmetrische Anteil des Projektionsoperators berücksichtigt wird, fällt die Summe über l' in Gln. (A 10) und (A 8) weg. Es wird nur $l' = 0$ mitgenommen.

Verwendet man die Entwicklung Gl. (20) für $\omega_K^K(\mathbf{r})$, so erhält man aus Gl. (A 1) für $\omega_{k,l,m}^K(r)$ die Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2) \omega_{k,l,m}^K(r) = m^* v_{hc}(r) \omega_{k,l,m}^K(r) - (-1)^m \frac{m^*}{\pi^{3/2}} \int r'^2 dr' g_{ll}^0(r, r'; K) v_{hc}(r') \omega_{k,l,m}^K(r') \quad (\text{A 13})$$

mit
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Entsprechend erhält man aus Gl. (A 3)

$$\omega_{k,l,m}^K(r) = j_l(kr) - \frac{2m^*}{\pi} \int r'^2 dr' G_l(r, r'; k) v_{hc}(r') \omega_{k,l,m}^K(r') + (-1)^m \frac{2m^*}{\pi^{3/2}} \int r'^2 dr' G_{ll}^0(r, r'; k, K) v_{hc}(r') \omega_{k,l,m}^K(r'). \quad (\text{A 14})$$

Jetzt wird gemäß BETHE und GOLDSTONE² der Ansatz gemacht

$$m^* v_{hc}(r) \omega_{k,l,m}^K(r) = \frac{A_{l,m}^K(k)}{r} [\delta(r-c) + q_{l,m}^K(r)], \quad (\text{A 15})$$

wobei die Funktion $q_{l,m}^K(r)$ nur für $r < c$ von Null verschieden ist.

Einsetzen in die Gl. (A 13) liefert zunächst für $q_{l,m}^K(r)$ die Integralgleichung

$$q_{l,m}^K(r) = (-1)^m \frac{rc}{\pi^{3/2}} \left\{ g_{ll}^0(r, c; K) + \frac{1}{c} \int_0^c r' dr' g_{ll}^0(r, r'; K) q_{l,m}^K(r') \right\}. \quad (\text{A 16})$$

Im Bereich $r \geq c$ erhält man dann

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \omega_{k,l,m}^K(r) &= \frac{A_{l,m}^K(k)}{r} \delta(r-c) - (-1)^m \frac{A_{l,m}^K(k)}{\pi^{3/2}} \left\{ c g_{ll}^0(r, c; K) + \int r' dr' g_{ll}^0(r, r'; K) q_{l,m}^K(r') \right\} \\ &= \frac{A_{l,m}^K(k)}{r} \{ \delta(r-c) - q_{l,m}^K(r) \} = A_{l,m}^K(k) \frac{f_{l,m}^K(r)}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A 17})$$

Mit der GREENSchen Funktion

$$\begin{aligned} H_l(r, r') &= k[j_l(kr') n_l(kr) - j_l(kr) n_l(kr')] \quad \text{für } r' < r, \\ &= 0 \quad \text{für } r' > r \end{aligned}$$

ergibt sich als Lösung der Gl. (A 17)

$$\omega_{k,l,m}^K(r) = A_{l,m}^K(k) \int_c^r H_l(r, r') f_{l,m}^K(r') r' dr' = A_{l,m}^K(k) u_{k,l,m}^K(r). \quad (\text{A } 18)$$

Wenn man $\omega_{k,l,m}^K(r)$ nach Gl. (A 18) berechnet hat, kann man aus dem geforderten asymptotischen Verhalten von $\omega_{k,l,m}^K(r)$ einen Ausdruck für $A_{l,m}^K(k)$ gewinnen (siehe dazu BETHE und GOLDSTONE²). Aber es ist leichter (besonders wenn man $l > 0$ betrachtet), $A_{l,m}^K(k)$ aus der Integralgleichung Gl. (A 14) mit der Nebenbedingung $\omega_{k,l,m}^K(c) = 0$ zu gewinnen.

Dabei erhält man

$$\begin{aligned} A_{l,m}^K(k) &= \frac{\pi}{2c} j_l(kc) \left\{ G_l(c, c; k) + \frac{1}{c} \int_0^c r' dr' G_l(c, r'; k) q_{l,m}^K(r') \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-1)^m}{2\pi^{1/2}} \left[G_u^0(c, c; k, K) + \frac{1}{c} \int_0^c r' dr' G_u^0(c, r'; k, K) q_{l,m}^K(r') \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{A } 19) \end{aligned}$$

Das α -Spektrum aus dem Zerfall des Li^{8*}

Von JÁNOS DARVAS

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforsch. 18 a, 569—576 [1963]; eingegangen am 16. Januar 1963)

The energy distribution of α -particles from the β - α -decay of Li^8 over the first excited state of Be^8 can be determined by means of the normalization integral over the α - α -scattering solution. Relating the relevant part of this integral to the phase shift, the α -spectrum may be obtained using one phenomenological parameter only. The calculation gives a correct fit to the experimental energy distribution, excepting a small region around the maximum.

Der β -Zerfall des Li^8 führt zu einem breiten angeregten Zustand des Be^8 (mit dem Drehimpuls $J=2$), der anschließend in zwei α -Teilchen zerfällt. Infolge der kurzen Zerfallszeit des angeregten Niveaus von Be^8 besitzen die α -Teilchen ein kontinuierliches Energiespektrum, das unmittelbar auf die Energieunschärfe des zerfallenden Zustandes zurückzuführen ist. Die relative kinetische Energie der α -Teilchen wird durch die Energieabhängigkeit a) des Matrixelementes des β -Überganges (die Wellenfunktion des Endzustandes ist energieabhängig) und b) des Phasenraumfaktors bestimmt.

Den Zusammenhang zwischen dem β - und dem α -Spektrum haben GRIFFY und BIEDENHARN¹ in einer neueren Arbeit untersucht. Sie formulieren das Problem im Rahmen der WIGNERSchen Theorie der Kernreaktionen und bestimmen auf Grund der formalen Umkehrbarkeit des β - α -Zerfallsprozesses die Dichte

der Zustände des Be^{8*} -Niveaus zu $(\sin^2 \delta_2)/P_\alpha$. Dabei ist δ_2 die Phasenverschiebung der α - α -Streuung mit relativem Drehimpuls $L=2$, P_α ist der „Durchdringungsfaktor“ für α -Teilchen. P_α wird mit einer halbempirischen Begründung eingeführt.

Die Phasenverschiebung δ_2 und der „Durchdringungsfaktor“ P_α enthalten keine wesentlich voneinander verschiedene physikalische Information. In der vorliegenden Arbeit wird das α -Spektrum unter Hinweis auf diese Feststellung weitgehend modellunabhängig und unter Verwendung eines einzigen adjustierbaren Parameters diskutiert. Die Untersuchung des α -Spektrums wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt geben wir die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für den β -Übergang an, die die Störungsrechnung liefert. Dabei wird der Grundzustand des Li^8 als energetisch fester Anfangszustand angenommen². Für den mit der Energie veränder-

* D 7.

¹ T. A. GRIFFY u. L. C. BIEDENHARN, Nucl. Phys. 15, 636 [1960].

² Diese Annahme wird durch die relativ große Halbwertszeit des β -Zerfalls von Li^8 gerechtfertigt.